

Tournoi 2026 corrigé lycée

Partages équilibrés

On obtient un partage équilibré pour un entier N en écrivant l'ensemble des entiers de 1 à N comme la réunion de plusieurs parties ayant même nombre d'éléments et même somme de leurs éléments.

Par exemple, pour $N = 4$: $\{1,2,3,4\} = \{1,4\} \cup \{2,3\}$ et pour $N = 6$: $\{1,2,3,4,5,6\} = \{1,6\} \cup \{2,5\} \cup \{3,4\}$

1) Ecrivez un partage équilibré pour $N = 8$ en quatre parties, puis en deux parties.

Pour quatre parties il y a une seule façon (chaque partie ayant une somme égale à 9) :

$$E = \{1,2,3,4,5,6,7,8\} = \{1,8\} \cup \{2,7\} \cup \{3,6\} \cup \{4,5\}$$

Pour deux parties on peut assembler par deux les parties précédentes mais il y a une autre façon :

$$E = \{1,2,7,8\} \cup \{3,4,5,6\} = \{1,3,6,8\} \cup \{2,4,5,7\} = \{1,4,5,8\} \cup \{2,3,6,7\} = \{2,3,5,8\} \cup \{1,4,6,7\}$$

2) Ecrivez un partage équilibré pour $N = 12$ en six parties, puis en trois parties, puis en deux parties.

Pour six parties il y a une seule façon (chaque partie ayant une somme égale à 13) :

$$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\} = \{1,12\} \cup \{2,11\} \cup \{3,10\} \cup \{4,9\} \cup \{5,8\} \cup \{6,7\}$$

Pour trois parties le plus simple et d'assembler par deux les parties précédentes mais il y a d'autres façons :

$$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\} = \{1,2,11,12\} \cup \{3,4,9,10\} \cup \{5,6,7,8\}$$

Pour deux parties le plus simple et d'assembler par trois les parties de la décomposition en 6 parties mais il y a beaucoup d'autres façons :

$$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\} = \{1,2,3,10,11,12\} \cup \{4,5,6,7,8,9\}$$

3) Montrez que si N est un multiple de 4 alors il existe au moins un partage équilibré en deux parties. Montrez la réciproque.

En s'inspirant de ce qu'on a obtenu pour $N = 12 = 4 \times 3$ on peut commencer par écrire le partage en $2k$ parties pour $N = 4k$ (chaque partie ayant une somme égale à $4k + 1$) :

$$\{1, \dots, 4k\} = \{1, 4k\} \cup \{2, 4k - 1\} \cup \dots \cup \{k, 3k + 1\} \cup \{k + 1, 3k\} \cup \dots \cup \{2k, 2k + 1\}$$

Puis on assemble les k premières parties d'une part et les k dernières d'autre part, cela donne deux parties à $2k$ éléments ayant la même somme égale à $k(4k + 1)$:

$$\{1, \dots, 4k\} = \{1, \dots, k - 1, k, 3k + 1, \dots, 4k - 1, 4k\} \cup \{k + 1, k + 2, \dots, 3k - 1, 3k\}$$

Réciproquement si $\{1, \dots, N\}$ est la réunion de deux parties ayant même nombre d'éléments et même somme de leurs éléments alors d'une part N est un entier pair, $N = 2n$, d'autre part la somme des entiers de 1 à N est un entier pair. Cette somme étant égale à $\frac{N(N+1)}{2} = n(2n + 1)$ et $2n + 1$ étant impair on en déduit que n doit être pair : par conséquent N doit être un multiple de 4.

4) Montrez que si N est un multiple de 6 alors il existe au moins un partage équilibré en trois parties. La réciproque est-elle vraie ?

On commence par écrire le partage en $3k$ parties pour $N = 6k$ (chaque partie ayant une somme égale à $6k + 1$) :

$$\{1, \dots, 6k\} = \{1, 6k\} \cup \{2, 6k - 1\} \dots \{k, 5k + 1\} \dots \{2k, 4k + 1\} \dots \cup \{3k, 3k + 1\}$$

Puis on assemble les k premières parties, les k suivantes et les k dernières, cela donne trois parties de $2k$ éléments ayant la même somme égale à $k(6k + 1)$:

$$\{1, \dots, 6k\} = \{1, \dots, k, 5k + 1, \dots, 6k\} \cup \{k + 1, \dots, 2k, 4k + 1, \dots, 5k\} \cup \{2k + 1, \dots, 4k\}$$

La réciproque est fautive puisque pour $N = 9$ il existe deux partages équilibrés en trois parties :

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \{1, 5, 9\} \cup \{3, 4, 8\} \cup \{2, 6, 7\} = \{2, 4, 9\} \cup \{1, 6, 8\} \cup \{3, 5, 7\}$$

En effet, la somme des entiers de 1 à 9 valant 45, chaque partie doit avoir une somme égale à 15. La partie qui contient 9 contient donc 5 et 1, ou bien 4 et 2 ; dans chaque cas on en déduit la partie qui contient 8 puis celle qui contient 7.

Complément : on en déduit qu'il existe un partage équilibré en trois parties si et seulement si N est un multiple de 3 au moins égal à 6.

En effet il est immédiat que s'il existe un partage équilibré en trois parties pour l'entier N alors N doit être un multiple de 3 ; d'autre part il n'y a pas de partage équilibré en trois parties pour $N = 3$.

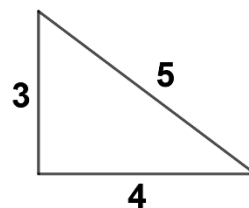
Réciproquement, on a déjà montré que pour $N = 6k$ il existe un partage équilibré en trois parties.

On a aussi montré que pour $N = 9$ il existe un partage équilibré en trois parties.

Pour $N = 6k + 9$ on peut prendre un partage équilibré en trois parties pour $N = 6k$ et on complète chacune des parties respectivement par $\{6k + 1, 6k + 5, 6k + 9\}$, par $\{6k + 3, 6k + 4, 6k + 8\}$ et par $\{6k + 2, 6k + 6, 6k + 7\}$.

Un puzzle avec des triangles

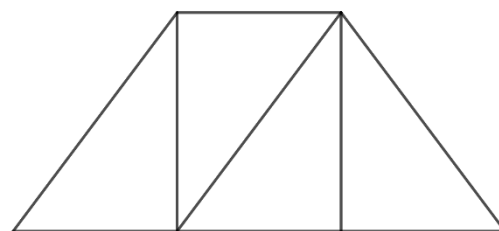
1) On dispose de pièces identiques ayant la forme d'un triangle rectangle de côtés de longueurs 3, 4 et 5.



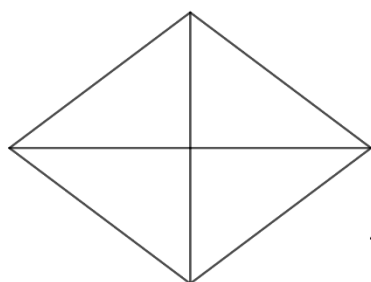
On assemble quatre de ces pièces, en les retournant éventuellement, pour former un polygone, deux pièces devant se toucher par un côté ayant la même longueur.

Dans l'exemple ci-contre le périmètre du polygone est égal à 22.

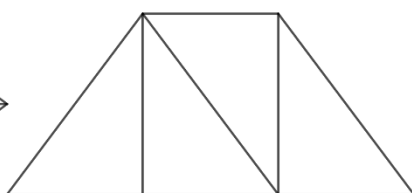
Quels sont toutes les valeurs possibles que peut prendre le périmètre du polygone ?



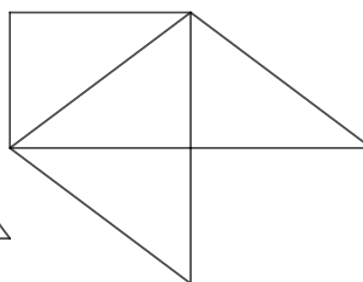
Il y a cinq valeurs possibles pour le périmètre du polygone et différents assemblages permettent de les obtenir, par exemple :



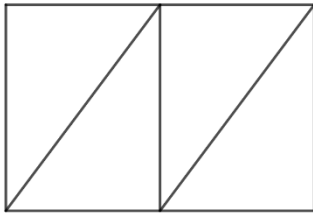
P=20



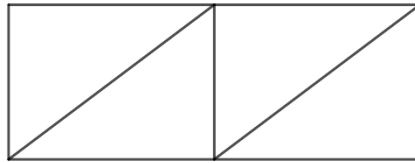
P=22



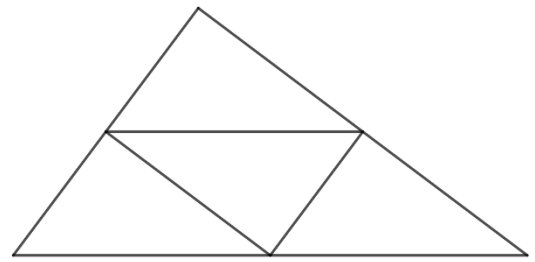
P=24



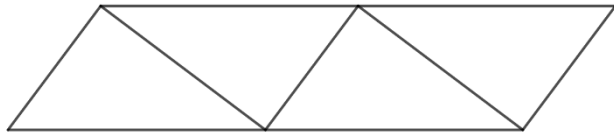
P = 20



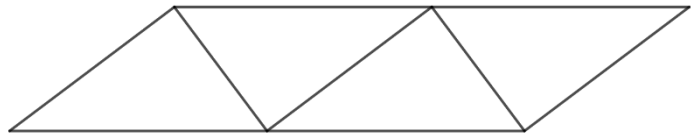
P = 22



P = 24



P = 26

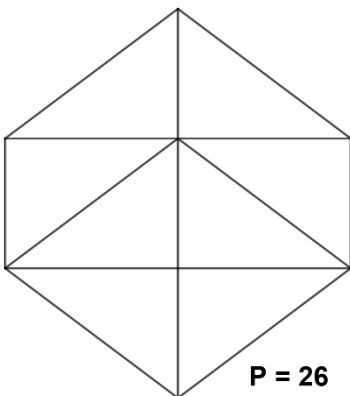


P = 28

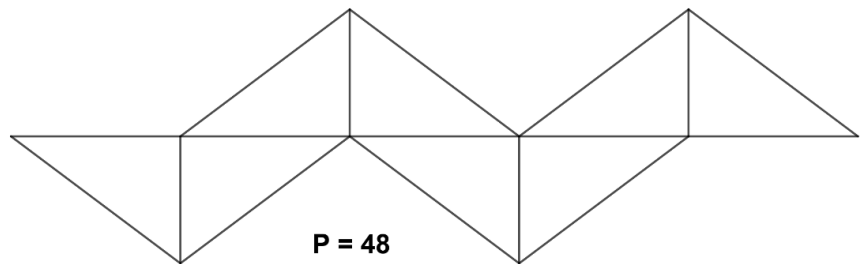
2) On assemble de la même façon huit de ces pièces triangulaires pour former un polygone. Quels sont le plus petit et le plus grand périmètre possible pour ce polygone ?

Le plus petit périmètre que l'on peut obtenir est égal à 26, il est obtenu pour un hexagone.

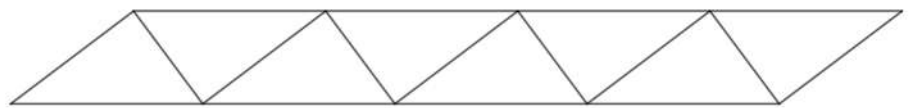
Le plus grand périmètre que l'on peut obtenir est égal à 48, il est obtenu en cherchant à aligner les triangles ; il y a plusieurs assemblages différents, par exemple :



P = 26



P = 48



P = 48

Grilles à compléter

On complète une grille découpée en zones en respectant les règles suivantes :

- chaque zone de N cases doit contenir les nombres de 1 à N sans répétition ;
- deux cases qui se touchent par un côté ou un sommet contiennent des nombres différents.

Par exemple la grille ci-contre vérifie les deux règles énoncées.

1	2	1
3	4	3
2	1	2

1) Déterminez toutes les grilles complétées qui existent à partir de la grille vierge ci-contre.

Il y a deux possibilités pour remplir la zone à deux cases.

Première possibilité : le 2 est à gauche et le 1 à droite.

Pour respecter la deuxième règle on doit alors mettre le 1 de la zone à trois cases en haut à droite puis le 1 de la zone à quatre cases en haut à gauche.

Le 2 de la zone à deux cases impose ensuite qu'on mette le 2 de la zone à quatre cases en haut au milieu puis le 2 de la zone à trois cases en bas à droite. On termine en plaçant le 3 de la zone à trois cases qui impose le 3 de la zone à quatre cases puis le 4. On obtient la grille qui a été proposée en exemple.

Deuxième possibilité : 1 à gauche et 2 à droite.

On fait exactement le même raisonnement en échangeant le 1 et le 2, cela ne change rien pour le 3 et le 4. On obtient la grille ci-contre.

2	1	2
3	4	3
1	2	1

2) *Complétez la grille ci-contre* :

On place d'abord les 1. Le 1 de la zone à deux cases impose de mettre le 1 de la zone à cinq cases en bas à gauche. On place le 1 de la zone à une case qui impose de mettre le 1 de la zone à quatre cases en bas à droite.

	1			
		1		

On place ensuite les 2. Celui de la zone à deux cases impose de mettre le 2 de la zone à cinq cases en haut au milieu puisqu'on ne peut pas mettre un 2 dans la case centrale de la grille (cela interdirait un 2 dans la zone à trois cases). Cela impose la place du 2 de la zone à quatre cases puis celle du 2 de la zone à trois cases.

On place ensuite le 3 de la zone à trois cases qui impose la place du 3 de la zone à quatre cases. On place ensuite le 4 de la zone à quatre cases. On ne peut ensuite placer que le 5 dans la case centrale de la grille. Il reste à placer le 3 et le 4 de la zone à cinq cases et il y a alors deux possibilités.

Il y a donc deux façons de compléter la grille :

2	1	2	3	1
3	4	5	4	2
1	2	1	3	1

et

2	1	2	3	1
4	3	5	4	2
1	2	1	3	1

3) *Déterminez toutes les grilles complétées qui existent à partir de la grille vierge ci-contre* :

On commence par placer le 1 dans la zone à une case, ce qui impose la place du 1 dans la zone à quatre cases. Ensuite il y a deux possibilités pour remplir la zone à deux cases.

Première possibilité : le 2 est à gauche et le 1 à droite.

On doit alors mettre le 1 de la zone à cinq cases en bas à gauche, d'où la place du 1 de la zone à trois cases. On se retrouve avec la grille initiale de la question 2) qui a les deux solutions déjà obtenues.

Deuxième possibilité : 1 à gauche et 2 à droite.

On doit placer le 2 de la zone à cinq cases en bas à gauche. Ensuite le 1 de la zone à cinq cases doit être en haut au milieu puisqu'on ne peut pas mettre un 1 dans la case centrale de la grille (cela interdirait un 1 dans la zone à trois cases).

Dans la case de gauche de la zone à trois cases on ne peut mettre ni le 2, ni le 3 (il interdirait de mettre un 3 dans la zone à cinq cases), on doit donc placer le 1. Il y a alors deux possibilités pour compléter la zone à trois cases :

a) 1 2 3 dans cet ordre

on finit alors de remplir la zone à quatre cases : le 3, puis le 2, puis le 4

dans la case centrale de la grille on ne peut mettre que le 5 puis il y a deux possibilités pour placer le 3 et le 4 :

1	2	1	3	1
3	4	5	4	2
2	1	2	3	1

1	2	1	3	1
4	3	5	4	2
2	1	2	3	1

b) 1 3 2 dans cet ordre

on finit alors de remplir la zone à quatre cases : le 2, puis le 3, puis le 4

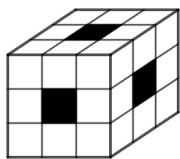
dans la case centrale de la grille on ne peut mettre que le 5 puis on termine en plaçant le 3 et le 4 :

1	2	1	2	1
3	4	5	4	3
2	1	3	2	1

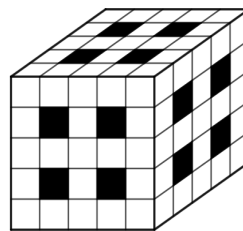
Au total on a donc trouvé 5 grilles différentes qui respectent les conditions demandées.

Un cube en noir et blanc

On considère un cube de côté un entier impair, constitué d'un assemblage de petits cubes noirs et blancs de côté 1 comme ci dessous pour les cubes de côtés 3 et 5. Lorsqu'on voit un petit cube noir sur une partie d'une face, toute la rangée correspondante est constituée de petits cubes noirs.



Cube de côté 3



Cube de côté 5

1) Combien y a-t-il de cubes de chaque couleur pour un cube de côté 3 ?

Il y a trois rangées formées de trois cubes noirs mais le cube central étant compté trois fois il faut retrancher 2, il y a donc 7 cubes noirs. Comme il y a 27 cubes au total cela fait par différence 20 cubes blancs.

pour un cube de côté 5 ?

Il y a douze rangées formées de 5 cubes noirs mais 8 cubes à l'intérieur sont comptés trois fois, il y a donc $12 \times 5 - 8 \times 2 = 44$ cubes noirs. Comme il y a 125 cubes au total cela fait par différence 81 cubes blancs.

2) Combien y a-t-il de cubes de chaque couleur pour un cube de côté N impair ?

Posons $N = 2p + 1$. Sur chaque face il y a p^2 cubes noirs donc avec trois paires de faces opposées il y a $3p^2$ rangées de $N = 2p + 1$ cubes noirs qui traversent le grand cube. Mais sur chacune de ces rangées il y a p cubes qui sont communs à trois rangées donc il y a p^3 cubes noirs à l'intérieur qui sont comptés trois fois. Il faut les retirer deux fois dans le décompte précédent.

Le nombre de cubes noirs est donc égal à $3p^2 \times (2p + 1) - p^3 \times 2 = 4p^3 + 3p^2 = p^2(4p + 3)$.

On peut aussi l'exprimer en fonction de N avec $p = \frac{N-1}{2}$: $\frac{(N-1)^2(2N+1)}{4} = \frac{2N^3 - 3N^2 + 1}{4}$

Comme il y a $N^3 = (2p + 1)^3 = 8p^3 + 12p^2 + 6p + 1$ cubes au total cela donne par différence le nombre de cubes blancs : $4p^3 + 9p^2 + 6p + 1 = (p + 1)(4p^2 + 5p + 1) = (p + 1)^2(4p + 1)$.

On peut aussi l'exprimer en fonction de N avec $p = \frac{N-1}{2}$: $\frac{(N+1)^2(2N-1)}{4} = \frac{2N^3 + 3N^2 - 1}{4}$

3) Quelle est la taille du cube le plus grand qu'on peut faire si on dispose de 2026 cubes blancs et autant de cubes noirs que l'on veut ?

Pour $p = 7$ la formule du nombre de cubes blancs donne 1856 et pour $p = 8$ elle donne 2673.

Pour ne pas dépasser 2026 la valeur maximale de p est donc $p = 7$ qui donne $N = 15$.

4) Montrez que le nombre de cubes noirs n'est jamais égal au carré d'un entier pour un cube de côté N impair.

Si le nombre de cubes noirs $p^2(4p + 3)$ était un carré alors $4p + 3$ serait un carré. C'est impossible car c'est un nombre impair et $(2k + 1)^2 = 4(k^2 + k) + 1$ montre qu'on n'obtient jamais $4p + 3$.

Pour quels entiers impairs N le nombre de cubes blancs est-il égal au carré d'un entier ?

Le nombre de cubes blancs $(p + 1)^2(4p + 1)$ est un carré si et seulement si $4p + 1$ est un carré.

Ce ne peut être que le carré d'un nombre impair et $(2k + 1)^2 = 4(k^2 + k) + 1$ montre qu'on obtient $4p + 1$ si et seulement si $p = (k^2 + k)$ c'est-à-dire $N = 2(k^2 + k) + 1 = k^2 + (k + 1)^2$.

Pour $k = 1$ on a $N = 5$ et le nombre de cubes blancs est égal à $81 = 9^2$.

Pour $k = 2$ on a $N = 13$ et le nombre de cubes blancs est égal à $1225 = 35^2$.

Pour $k = 3$ on a $N = 25$ et le nombre de cubes blancs est égal à $8281 = 91^2$.